PART4　二項分布の正規分布による近似

例題

(1)　1 個のさいころを 180 回投げるとき，1 の目が出る回数が 36 回以上である確率を求めよ。

(2)　ある植物の種の発芽率は 60% である。この種を 600 粒まくとき，k 粒以上の種が発芽する確率が 75% 以上になるような k の最大値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　ある製品が不良品である確率は 0.02 であるとする。この製品 2500 個中の不良品の個数が 36 個以下である確率を求めよ。

(2)　2 択問題 100 問を出題し，k 問以上正解した人を合格とする。考えることなくでたらめに選んだときの合格率が 2% 以下になるような k の最小値を求めよ。

第 7 講　PART4 確認問題

次の＜正規分布表＞を用いて，以下の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

1　ある工場で作られる製品には 10％の割合で不良品が出るという。この製品を 1600 個選んだとき，含まれる不良品の個数が 145 個以下である確率は 0.［アイウエ］である。

2　1 個のさいころを 720 回投げるとき，1 の目が出る回数が k 回以上である確率が 70％以上になるような k の値の最大値は，［オカキ］である。

PART4　二項分布の正規分布による近似

例題

(1)　1 個のさいころを 180 回投げるとき，1 の目が出る回数が 36 回以上である確率を求めよ。

(2)　ある植物の種の発芽率は 60% である。この種を 600 粒まくとき，k 粒以上の種が発芽する確率が 75% 以上になるような k の最大値を求めよ。

(1)　1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=180\cdot\frac{1}{6}=30,\quad V(X)=180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=25,\quad \sigma(X)=\sqrt{25}=5$$

$n=180$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-30}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$P(X\geqq 36)=P(Z\geqq 1.2)=0.5-p(1.2)=0.5-0.3849=0.1151$$

(2)　発芽する種の個数を X とすると，X は二項分布 $B\left(600,\ \frac{3}{5}\right)$ に従うから

$$E(X)=600\cdot\frac{3}{5}=360,\quad V(X)=600\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=144,\quad \sigma(X)=\sqrt{144}=12$$

$n=600$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(360,\ 12^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\frac{X-360}{12}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

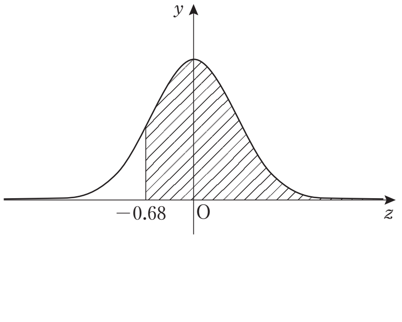
$P(X\geqq k)\geqq 0.75$ とすると　$P\left(Z\geqq\frac{k-360}{12}\right)\geqq 0.5+0.25$

よって　$p\left(-\frac{k-360}{12}\right)\geqq 0.25$

$p(0.67)=0.2486$，$p(0.68)=0.2517$ より

$$-\frac{k-360}{12}\geqq 0.68 \qquad k\leqq 351.84$$

よって，求める k の最大値は 351



練習

(1)　ある製品が不良品である確率は 0.02 であるとする。この製品 2500 個中の不良品の個数が 36 個以下である確率を求めよ。

(2)　2 択問題 100 問を出題し，k 問以上正解した人を合格とする。考えることなくでたらめに選んだときの合格率が 2% 以下になるような k の最小値を求めよ。

(1)　不良品の個数を X とすると，X は二項分布 $B(2500,\ 0.02)$ に従うから

$$E(X)=2500\cdot 0.02=50,\quad V(X)=2500\cdot 0.02\cdot 0.98=49,\quad \sigma(X)=\sqrt{49}=7$$

$n=2500$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(50,\ 7^2)$ に従うとみなしてよい。

ここで，$Z=\dfrac{X-50}{7}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うので，求める確率は

$$P(X\leqq 36)=P(Z\leqq -2)=0.5-p(2)=0.5-0.4772=0.0228$$

(2)　正解した問題の数を X とすると，X は二項分布 $B\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に従うから

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{2}=50,\quad V(X)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=25,\quad \sigma(X)=\sqrt{25}=5$$

$n=100$ は十分に大きいから，X は正規分布 $N(50,\ 5^2)$ に従うとみなしてよい。

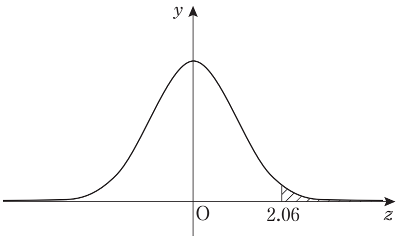
ここで，$Z=\dfrac{X-50}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$P(X\geqq k)\leqq 0.02$ とすると　　$0.5-p\left(\dfrac{k-50}{5}\right)\leqq 0.02$

よって $p\left(\dfrac{k-50}{5}\right)\geqq 0.48$

$p(2.05)=0.4798$，$p(2.06)=0.4803$ より

$$\frac{k-50}{5}\geqq 2.06 \qquad k\geqq 60.3$$



よって，求める k の最小値は 61

第 7 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイウエ：1056

[解説]

不良品の個数を X とすると，X は二項分布

$B(1600,\ 0.1)$ に従うから

$$E(X)=1600\cdot 0.1=160 \quad \text{[A]}$$

$$V(X)=1600\cdot 0.1\cdot 0.9=144$$

$$\sigma(X)=\sqrt{144}=12$$

$n=1600$ は十分に大きいから，X は

正規分布 $N(160,\ 12^2)$ に従うとみなしてよい。 [B]

ここで，$Z=\dfrac{X-160}{12}$ とおくと，Z は

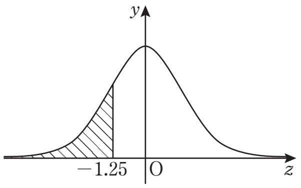
標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X \leqq 145$ のとき，$Z \leqq \dfrac{145-160}{12}$ より

$$Z \leqq -1.25$$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned} P(X \leqq 145) &= P(Z \leqq -1.25) \\ &= P(Z \geqq 1.25) \\ &= 0.5-P(0 \leqq Z \leqq 1.25) \\ &= 0.5-p(1.25) \\ &= 0.5-0.3944 \\ &= \mathbf{0.1056} \end{aligned}$$



[A]　確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
$E(X)=np$，$V(X)=npq$，
$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

[B]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$

2 ［正解］オカキ：114

［解説］

1 の目が出る回数を X とすると，X は二項分布

$B\left(720,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから

$$E(X)=720\cdot\frac{1}{6}=120$$

$$V(X)=720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=100$$

$$\sigma(X)=\sqrt{100}=10$$

$n=720$ は十分に大きいから，X は

正規分布 $N(120,\ 10^2)$ に従うとみなしてよい。［C］

ここで，$Z=\dfrac{X-120}{10}$ とおくと，Z は

標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X\geqq k$ のとき，$Z\geqq\dfrac{k-120}{10}$ であるから，$P(X\geqq k)$

が 0.7 以上となるとき

$$P\left(Z\geqq\frac{k-120}{10}\right)\geqq 0.5+0.2$$

よって　$P\left(\dfrac{k-120}{10}\leqq Z\leqq 0\right)\geqq 0.2$ ［D］

すなわち　$P\left(0\leqq Z\leqq\dfrac{120-k}{10}\right)\geqq 0.2$ より

$$p\left(\frac{120-k}{10}\right)\geqq 0.2$$

正規分布表により

$$p(0.52)=0.1985,\quad p(0.53)=0.2019$$

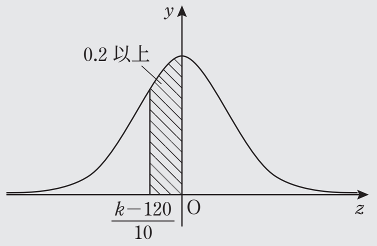
であるから

$$\frac{120-k}{10}\geqq 0.53$$

$$120-k\geqq 5.3$$

$$k\leqq 114.7$$

よって，求める k の最大値は　**114**

［C］　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ npq)$ に従うとみなしてよい。ただし，$q=1-p$

［D］